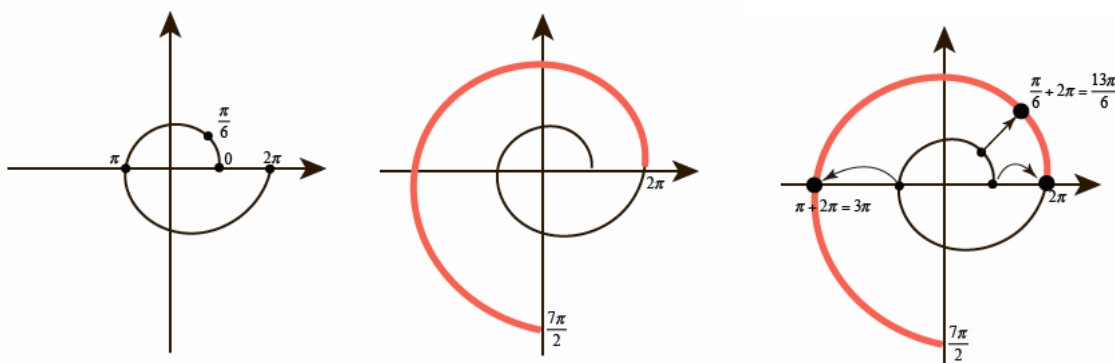


13. а) Решите уравнение $(2\sin^2(\pi+x) - 3\sin x + 1) \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x} = 0$.

б) Укажите корни из промежутка $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение

Во-первых, выпишем условия существования решений данного уравнения $\operatorname{tg} x \geq 0$ и применим формулу приведения в первом множителе. Во-вторых, решим уравнения $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ (1) и $\operatorname{tg} x = 0$ (2). Данные уравнения с учетом условия имеют следующие решения $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \pi n; n, k \in \mathbb{Z}$, что является ответом на пункт а) данной задачи. В-третьих, осуществим поиск корней на заданном промежутке, для этого воспользуемся следующей последовательностью рисунков.



Последовательно изобразив «основной оборот» и ядро решений, а так же заданный промежуток на рисунках 2 и 3, получаем ответ на пункт б): $2\pi, 3\pi, \frac{13\pi}{6}$.

15. Решите неравенство $x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2 + x - 7}{x - 7} \leq 1$.

Решение

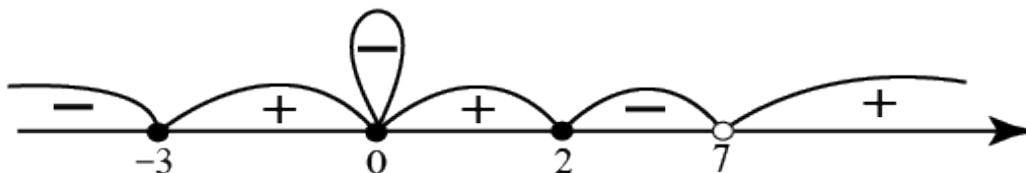
Выполним цепочку равносильных преобразований:

$$x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2}{x-7} + \frac{x-7}{x-7} \leq 1; \quad x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2}{x-7} + 1 \leq 1; \quad x^2 \cdot \left(x + 8 + \frac{50}{x-7}\right) \leq 0;$$

$$x^2 \cdot \left(\frac{x^2 + x - 6}{x-7}\right) \leq 0; \quad x^2 \cdot \left(\frac{(x+3) \cdot (x-2)}{x-7}\right) \leq 0; \quad \text{Теперь будем решать данное неравенство}$$

методом интервалов, строго следуя известному алгоритму:

Во-первых, введём функцию $f(x) = x^2 \cdot \left(\frac{(x+3) \cdot (x-2)}{x-7} \right)$. Во-вторых, найдем область определения функции: $x \neq 7$. В-третьих, найдем нули функции: $x = -3, x = 2, x = 0$. В-четвертых, заметив, что функция является рациональной и, учитывая кратность одного из корней, укажем знаки функции на каждом промежутке (рис.).



Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{0\} \cup [2; 7)$.

19. На доске записан ряд натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n (где $n \geq 7$). Сумма каждых семи из них меньше 15, а сумма всех чисел из данного ряда равна 100.

- Может ли на доске быть записано 35 чисел?
- Может ли на доске быть записано 50 чисел?
- Какое наименьшее количество чисел может быть в ряду?

Решение

а) Если 35 чисел сгруппировать по 7 чисел, то получится 5 групп, причем сумма чисел каждой группы не превосходит 14. Следовательно, сумма всех 35 чисел, не превосходит 70. Значит 35 чисел записать нельзя.

б) Ряд из пятидесяти двоек удовлетворяет условиям задачи.

в) Предположим, что на доске записано не больше 49 чисел. Тогда ряд чисел можно разделить на группы, в каждой из которых не более 7 элементов. Таких групп будет не более 7. Значит и сумма всех чисел не более 98. Противоречие. Ответ: нет.